



Задание 16

Планиметрические задачи

Многоугольники и их свойства

1. На стороне CD квадрата $ABCD$ построен равносторонний треугольник CPD . Найдите высоту треугольника ADP , проведённую из вершины D , если известно, что сторона квадрата равна 1.
2. Площадь трапеции $ABCD$ равна 90, а одно из оснований трапеции вдвое больше другого. Диагонали пересекаются в точке O ; отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C , пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N соответственно. Найдите площадь четырёхугольника $OMPN$.
3. Дан параллелограмм $ABCD$, $AB = 2$, $BC = 3$, $\angle A = 60^\circ$. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырёхугольника $ABOD$.
4. Дана трапеция $ABCD$, основания которой $BC = 44$, $AD = 100$; $AB = CD = 35$. Окружность, касающаяся прямых AD и AC , касается стороны CD в точке K . Найдите длину отрезка CK .
5. В треугольнике ABC на стороне BC выбрана точка D так, что $BD : DC = 1 : 2$. Медиана CE пересекает отрезок AD в точке F . Какую часть площади треугольника ABC составляет площадь треугольника AEF ?
6. Площадь трапеции $ABCD$ равна 560. Диагонали пересекаются в точке O . Отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C , пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N . Найдите площадь треугольника MON , если одно из оснований трапеции в полтора раза больше другого.
7. Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 17$, $AC = 25$ и $BC = 28$. На стороне BC взята точка M , причём $AM = \sqrt{241}$. Найдите площадь треугольника AMB .
8. Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 34$, $AC = 65$ и $BC = 93$. На стороне BC взята точка M , причём $AM = 20$. Найдите площадь треугольника AMB .

9. Площадь трапеции $ABCD$ равна 240. Диагонали пересекаются в точке O . Отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C , пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N . Найдите площадь треугольника MON , если одно из оснований трапеции втрое больше другого.

10. В прямоугольнике $ABCD$ со сторонами $AB = 4$ и $BC = 10$ на стороне AD расположены точки M и N таким образом, что $DM = 4$, при этом P — точка пересечения прямых BN и CM . Площадь треугольника MNP равна 1. Найдите длину отрезка, соединяющего точки M и N .

11. В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов при стороне AD делят сторону BC точками M и N так, что $BM : MN = 1 : 2$. Найдите BC если $AB = 12$.

12. Основание равнобедренного треугольника равно 40, косинус угла при вершине равен $\frac{15}{17}$. Две вершины прямоугольника лежат на основании треугольника, а две другие — на боковых сторонах. Найдите площадь прямоугольника, если известно, что одна из его сторон вдвое больше другой.

Окружности и треугольники

1. В треугольнике ABC , $AB = 15$, $BC = 7$, $CA = 9$. Точка D лежит на прямой BC причем $BD : DC = 5 : 7$. Окружности, вписанные в каждый из треугольников ADC и ADB касаются стороны AD в точках E и F . Найдите длину отрезка EF .

2. Расстояние между параллельными прямыми равно 12. На одной из них лежит точка C , а на другой — точки A и B , причем треугольник ABC — остроугольный равнобедренный и его боковая сторона равна 13. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC .

3. Расстояние между параллельными прямыми равно 4. На одной из них лежит точка C , а на другой — точки A и B , причем треугольник ABC — остроугольный равнобедренный, и его боковая сторона равна 5. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC .

4. Окружность, вписанная в треугольник ABC , площадь которого равна 114, касается средней линии, параллельной стороне BC . Известно, что $BC = 19$. Найдите сторону AB .

5. В треугольнике ABC , $AB = 7$, $BC = 9$, $CA = 4$. Точка D лежит на прямой BC причем $BD : DC = 1 : 5$. Окружности, вписанные в треугольники ADC и ADB касаются стороны AD в точках E и F . Найдите длину отрезка EF .

6. Прямая, перпендикулярная боковой стороне равнобедренного треугольника, отсекает от него четырехугольник, в который можно вписать окружность. Найдите радиус окружности, если отрезок прямой, заключённый внутри треугольника, равен 6, а отношение боковой стороны треугольника к его основанию равно $\frac{5}{6}$.

7. Прямая, перпендикулярная гипотенузе прямоугольного треугольника, отсекает от него четырехугольник, в который можно вписать окружность. Найдите радиус окружности, если отрезок этой прямой, заключённый внутри треугольника, равен 12, а косинус острого угла равен $\frac{3}{5}$.

8. Прямая, перпендикулярная гипотенузе прямоугольного треугольника, отсекает от него четырехугольник, в который можно вписать окружность. Найдите радиус окружности, если отрезок этой прямой, заключённый внутри треугольника, равен 40, а отношение катетов треугольника равно $\frac{15}{8}$.

9. Точка M лежит на отрезке AB . На окружности с диаметром AB взята точка C , удаленная от точек A , M и B на расстояния 20, 14 и 15 соответственно. Найдите площадь треугольника BMC .

10. Точка M лежит на отрезке AB . На окружности с диаметром AB взята точка C , удаленная от точек A , M и B на расстояния 40, 29 и 30 соответственно. Найдите площадь треугольника BMC .

11. Дан треугольник со сторонами 115, 115 и 184. Внутри него расположены две равные касающиеся окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Найдите радиусы окружностей.

12. Дан треугольник со сторонами 26, 26 и 20. Внутри него расположены две равные касающиеся окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Найдите радиусы окружностей.

13. Стороны AB и BC треугольника ABC равны соответственно 26 и 14,5, а его высота BD равна 10. Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники ABD и BCD .

14. Стороны KM и MN треугольника KMN равны соответственно 30 и 25, а его высота MH равна 24. Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники KMH и MNH .

15. Высота равнобедренного треугольника, опущенная на основание, равна 9, а радиус вписанной в треугольник окружности равен 4. Найдите радиус окружности, касающейся стороны треугольника и продолжений двух его сторон.

Окружности и четырёхугольники

1. Окружность S радиуса 24 вписана в равнобедренную трапецию с основаниями 36 и 64. Найдите радиус окружности, которая касается основания, боковой стороны и окружности S .

2. Окружности радиусов 3 и 5 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке A . Прямая, проходящая через точку A , вторично пересекает меньшую окружность в точке B , а большую — в точке C . Найдите площадь выпуклого четырёхугольника, вершинами которого являются точки O_1 , O_2 , B и C , если $\angle ABO_1 = 15^\circ$.

3. Дан прямоугольник $KLMN$ со сторонами: $KN = 11$, $MN = 8$. Прямая, проходящая через вершину M , касается окружности с центром K радиуса 4 и пересекается с прямой KN в точке Q . Найдите QK .

4. Дан прямоугольник $KLMN$ со сторонами: $KN = 13$, $MN = 6$. Прямая, проходящая через вершину M , касается окружности с центром K радиуса 3 и пересекается с прямой KN в точке Q . Найдите QK .

5. Дан ромб $ABCD$ с диагоналями $AC = 24$ и $BD = 10$. Проведена окружность радиуса $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ с центром в точке пересечения диагоналей ромба. Прямая, проходящая через вершину B касается этой окружности и пересекает прямую CD в точке M . Найдите CM .

Окружности и системы окружностей

1. Окружности радиусов 2 и 3 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке A . Прямая, проходящая через точку A , вторично пересекает меньшую окружность в точке B , а большую — в точке C . Найдите площадь треугольника BCO_2 , если $\angle ABO_1 = 30^\circ$.

2. Центр O окружности радиуса 4 принадлежит биссектрисе угла величиной 60° . Найдите радиус окружности, вписанной в данный угол и касающейся данной окружности, если известно, что расстояние от точки O до вершины угла равно 10.
3. Найдите длину отрезка общей касательной к двум окружностям, заключенного между точками касания, если радиусы окружностей равны 31 и 17, а расстояние между центрами окружностей равно 50.
4. Окружности радиусов 11 и 21 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются внешним образом в точке C , AO_1 и BO_2 — параллельные радиусы этих окружностей, причём $\angle AO_1O_2 = 60^\circ$. Найдите AB .
5. Две окружности, радиусы которых равны 9 и 4, касаются внешним образом. Найдите радиус третьей окружности, которая касается двух данных окружностей и их общей внешней касательной.
6. Найдите длину отрезка общей касательной к двум окружностям, заключенного между точками касания, если радиусы окружностей равны 23 и 7, а расстояние между центрами окружностей равно 34.

Задача на доказательство и вычисление

1. Две окружности касаются внешним образом в точке K . Прямая AB касается первой окружности в точке A , а второй — в точке B . Прямая BK пересекает первую окружность в точке D , прямая AK пересекает вторую окружность в точке C .
- а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.
- б) Найдите площадь треугольника AKB , если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1.
2. Диагональ AC прямоугольника $ABCD$ с центром O образует со стороной AB угол 30° . Точка E лежит вне прямоугольника, причём $\angle BEC = 120^\circ$.
- а) Докажите, что $\angle CBE = \angle COE$.
- б) Прямая OE пересекает сторону AD прямоугольника в точке K . Найдите EK , если известно, что $BE = 40$ и $CE = 24$.
3. Медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Точки A_2 , B_2 и C_2 — середины отрезков MA , MB и MC соответственно.
- а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC .
- б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB = 5$, $BC = 8$ и $AC = 10$.

4. Медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Точки A_2 , B_2 и C_2 — середины отрезков MA , MB и MC соответственно.

а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC .

б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB = 4$, $BC = 7$ и $AC = 8$.

5. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AP и CQ .

а) Докажите, что угол PAC равен углу PQC .

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC , если известно, что $PQ=8$ и $\angle ABC = 60^\circ$.

6. В остроугольном треугольнике KMN проведены высоты KB и NA .

а) Докажите, что угол ABK равен углу ANK .

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABM , если известно, что $KN = 8\sqrt{2}$ и $\angle KMN = 45^\circ$.

7. Медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Известно, что $AC = 3MB$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Найдите сумму квадратов медиан AA_1 и CC_1 , если известно, что $AC = 12$.

8. Медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Известно, что $AC = 3MB$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Найдите сумму квадратов медиан AA_1 и CC_1 , если известно, что $AC = 10$.

9. Биссектриса угла ADC параллелограмма $ABCD$ пересекает прямую AB в точке E . В треугольник ADE вписана окружность, касающаяся стороны AE в точке K и стороны AD в точке T .

а) Докажите, что прямые KT и DE параллельны.

б) Найдите угол BAD , если известно, что $AD = 6$ и $KT = 3$.

10. Дан четырёхугольник $ABCD$.

а) Докажите, что отрезки LN и KM , соединяющие середины его противоположных сторон, делят друг друга пополам.

б) Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если $LM = 3\sqrt{3}$, $KM = 6\sqrt{3}$, $\angle KML = 60^\circ$.

11. Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H .

а) Докажите, что $\angle AHB_1 = \angle ACB$.